Zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben des eingeschränkten Dreikörperproblems

Aufsatz von

Dr. Ing. K. Nixdorff und Ing. H. Altmann

INHALTSVERZEICHNIS Seite

1. MASCHINENGLEICHUNGEN

Die Problemgleichungen (mit m_2 statt β und m_3 statt α)

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \gamma m_2 \frac{x-b}{s^3} + \gamma m_3 \frac{x+a}{r^3} = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \gamma m_2 \frac{y}{s^3} + \gamma m_3 \frac{y}{r^3} = 0 \tag{2}$$

müssen zur Lösung mit dem Analogrechner normiert werden.

Hierzu werden die Problemgleichungen zunächst nach der höchsten Ableitung aufgelöst:

$$-\ddot{x} = -2\omega\dot{y} - \omega^2 x + \gamma m_2 \frac{x-b}{s^3} + \gamma m_3 \frac{x+a}{r^3}, \tag{3}$$

$$-\ddot{y} = +2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \gamma m_2 \frac{y}{s^3} + \gamma m_3 \frac{y}{r^3}. \tag{4}$$

Mit den Substitutionen

$$\dot{x} = v \qquad \ddot{x} = \dot{v} \tag{5}$$

$$\dot{y} = w \qquad \ddot{y} = \dot{w} \tag{6}$$

ergibt sich dann

$$-\dot{v} = -2\omega w - \omega^2 x + \gamma m_2 \frac{x-b}{s^3} + \gamma m_3 \frac{x+a}{r^3}, \tag{7}$$

$$-\dot{w} = +2\omega v - \omega^2 y + \gamma m_2 \frac{y}{s^3} + \gamma m_3 \frac{y}{r^3}. \tag{8}$$

Diese Umformung hat den Vorteil, daß wir mit den zusätzlichen Variablen v und w auch zusätzliche Maßstabsfaktoren erhalten, die wir frei wählen können. Wir erreichen dadurch eine bessere Anpassung an den Rechner.

Wir treffen folgende Vereinbarungen

$$v = \lambda_v V \tag{9}$$

$$w = \lambda_w W \tag{10}$$

$$x = \lambda_x X \tag{11}$$

$$y = \lambda_y Y \tag{12}$$

$$\overline{t} = \lambda_z t \tag{13}$$

wobei λ_i die Maßstabsfaktoren, kleine Buchstaben die Problemvariablen und große Buchstaben die entsprechenden dimensionslosen Maschinenvariablen bedeuten.

In unserem Fall darf die xy-Ebene wegen der notwendigen Bildung der Funktionen

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{((x+a)^2+y^2)^{3/2}} \tag{14}$$

$$\frac{1}{s^3} = \frac{1}{((x-b)^2+y^2)^{3/2}} \tag{15}$$

nicht verzerrt werden, da nach Bildung der Funktionen nicht mehr entzerrt werden kann. Daher muß hier

$$\lambda_x = \lambda_y \tag{16}$$

gesetzt werden. Unter der Voraussetzung, daß die Masse m_3 sehr viel größer als m_2 ist, macht sich die Bevorzugung der x-Richtung gegenüber der y-Richtung erst in näherer Umgebung von m_2 stark bemerkbar. Deshalb empfiehlt es sich

$$\lambda_v = \lambda_w \tag{17}$$

zu setzen.

Weiterhin ergibt sich mit

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\overline{t}}\,\lambda_z \quad \text{(vergl. 13)} \tag{18}$$

aus (9)...(12)

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \lambda_z\,\lambda_v\,\frac{dV}{d\overline{t}} = \lambda_z\,\lambda_v\,\dot{V} \tag{19}$$

und entsprechend

$$\dot{w} = \lambda_z\,\lambda_v\,\dot{W} \tag{20}$$

$$\dot{x} = \lambda_z\,\lambda_x\,\dot{X} \tag{21}$$

$$\dot{y} = \lambda_z\,\lambda_x\,\dot{Y}\,. \tag{22}$$

Da

$$\dot{x} = v = \lambda_v\,V \tag{23}$$

$$\dot{y} = w = \lambda_v\,W \tag{24}$$

folgt außerdem aus (21) und (22)

$$\dot{X} = \frac{\lambda_v}{\lambda_z \lambda_x} V \tag{25}$$

$$\dot{Y} = \frac{\lambda_v}{\lambda_z \lambda_x} W . \tag{26}$$

Die beiden letzten Gleichungen stellen schon einen Teil der Maschinengleichungen dar.

Setzt man nun die Beziehungen (9). . . . (13), (19) und (20) in die Gleichungen (7) und (8) ein, dann erhält man die übrigen Maschinengleichungen:

$$- \dot{V} = - \frac{2\omega}{\lambda_z} W - \frac{\omega^2 \lambda_x}{\lambda_z \lambda_v} X \tag{27}$$

$$+ \frac{\gamma m_2 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{X-B}{((X-B)^2+Y^2)^{3/2}} + \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{X+A}{((X+A)^2+Y^2)^{3/2}},$$

$$- \dot{W} = + \frac{2\omega}{\lambda_z} V - \frac{\omega^2 \lambda_x}{\lambda_z \lambda_v} Y \tag{28}$$

$$+ \frac{\gamma m_2 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{Y}{((X-B)^2+Y^2)^{3/2}} + \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{Y}{((X+A)^2+Y^2)^{3/2}} .$$

Da man, wie sich bei der Durchführung der Bahnberechnung zeigen wird, bei der Bildung der Funktionen

$$F_1 = \frac{1}{((X+A)^2+Y^2)^{3/2}} \text{ und } F_2 = \frac{1}{((X-B)^2+Y^2)^{3/2}} \tag{29}$$

Werte von $|F_{1,2}| >> 1$ erhält, die betreffenden variablen Funktionsgeber aber nur Werte $|F_{1,2}| \leq 1$ abgeben, muß auch für die Funktionen F_1 und F_2 ein Maßstabsfaktor eingeführt werden.

Wir setzen

$$F_1 = \lambda_F \overline{F}_1 \tag{30}$$

$$F_2 = \lambda_F \overline{F}_2 \tag{31}$$

und erhalten damit die endgültige Form der <u>Maschinengleichungen:</u>

$$-\dot{V} = -\frac{2\omega}{\lambda_z} W - \frac{\omega^2 \lambda_x}{\lambda_z \lambda_v} X$$

$$+ \frac{\gamma m_2 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{X - B}{\lambda_F((X-B)^2+Y^2)^{3/2}} + \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{X + A}{\lambda_F((X+A)^2+Y^2)^{3/2}} \, . \quad (32)$$

$$-\dot{W} = +\frac{2\omega}{\lambda_z} V - \frac{\omega^2 \lambda_x}{\lambda_z \lambda_v} Y$$

$$+ \left[\frac{\gamma m_2 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{1}{\lambda_F((X-B)^2+Y^2)^{3/2}} + \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \frac{1}{\lambda_F((X+A)^2+Y^2)^{3/2}} \right] Y. \quad (33)$$

Hierbei stellen jeweils die ersten Brüche der einzelnen Glieder die Maschinenkoeffizienten k_i dar.

Es ist

$$k_1 = \frac{2\omega}{\lambda_z} \quad (34) \qquad k_2 = \frac{\omega^2 \lambda_x}{\lambda_z \lambda_v} \quad (35)$$

$$k_3 = \frac{\gamma m_2 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \quad (36) \qquad k_4 = \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} \quad (37).$$

Wie aus dem Schaltplan ersichtlich ist. ergeben sich noch weitere Koeffizienten, die alle in der Potentiometerliste zusammengefaßt sind.

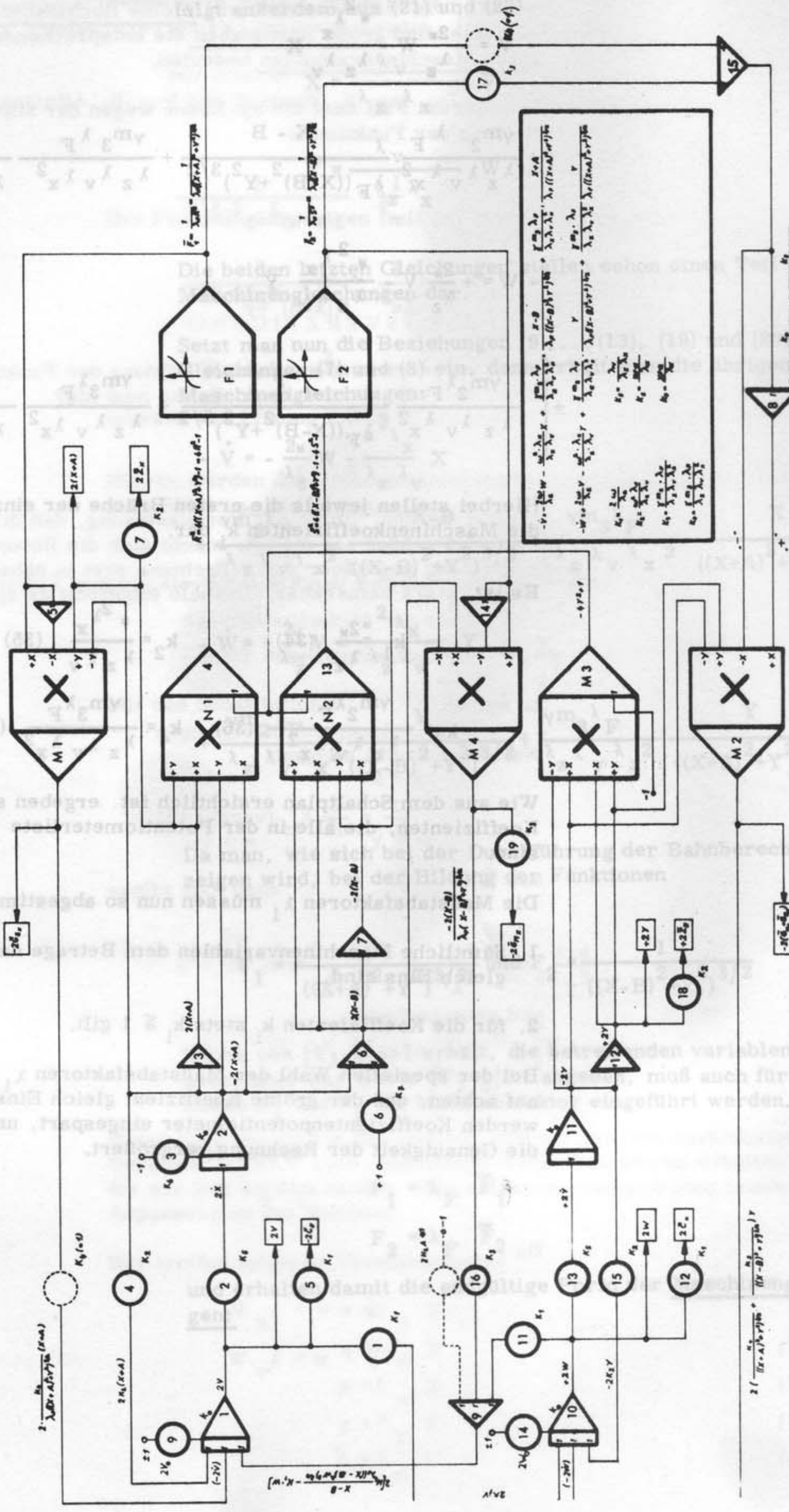
Die Maßstabsfaktoren λ_i müssen nun so abgestimmt werden, daß

1. Sämtliche Maschinenvariablen dem Betrage nach kleiner oder gleich Eins sind,

2. für die Koeffizienten k_i stets $k_i \leq 1$ gilt.

Bei der speziellen Wahl der Maßstabsfaktoren λ_i sollte man darauf achten, daß der größte Koeffizient gleich Eins wird. Dadurch werden Koeffizientenpotentiometer eingespart, und außerdem wird die Genauigkeit der Rechnung vergrößert.

2. SCHALTPLAN



2. SCHALTPLAN (siehe Seite 6)

3. TABELLE DER BENÖTIGTEN PHYSIKALISCHEN KONSTANTEN

Masse der Erde $m_3 = 5,970 \cdot 10^{24}$ kg,

Masse des Mondes $m_2 = 7,347 \cdot 10^{22}$ kg,

Gravitationskonstante $\gamma = 66,7 \cdot 10^{-21} \frac{km^3}{s^2 kg}$,

Mittlere Entfernung zwischen Erde und Mond l = 384 400 km.

4. WAHL DER MASZSTABSFAKTOREN

Bei der Wahl der Maßstabsfaktoren ergeben sich erhebliche Schwierigkeiten. Erst nach mehrmaligem Durchrechnen sämtlicher Maschinenkoeffizienten konnte eine endgültige Festlegung getroffen werden. Für die Schwierigkeiten gibt es mehrere Gründe:

1. Die Maschinenkoeffizienten sollen etwa im Bereich

$$0,01 \leqq k_i \leqq 1$$

liegen. Mit Min $(k_i) = 0,00892$ und Max $(k_i) = 1$ konnte dieser Bereich nicht mehr ganz eingehalten werden, doch ist der Wert von 0,00892 noch vertretbar.

2. Der Satellit sollte einen möglichst großen Bereich der xy-Ebene durchfliegen können, ohne daß einzelne Verstärker des Rechners übersteuern. Da weiterhin die Gravitationskräfte von Erde bzw. Mond für $r \to 0$ bzw. $s \to 0$ gegen ∞ gehen, muß ein gewisser Bereich um Erde und Mond als Flugfeld ausgeschlossen werden. Dieser Bereich sollte möglichst klein gehalten werden. Er ergibt sich hier zu $r \leqq 10^5$ km und $s \leqq 10^5$ km.

Es ergibt sich folgende, endgültige Festlegung der Maßstabsfaktoren:

Maßstabsfaktor der Ortskoordinaten $\lambda_x = 10^6$ [km],

Maßstabsfaktor der Funktionsgeber $\lambda_F = 2 \cdot 10^3$ [1],

Maßstabsfaktor der Geschwindigkeiten $\lambda_v = 10$ $[\frac{km}{s}]$.

Wie sich zeigte, hatte der Maschinenkoeffizient k_4 den größten Wert aller Koeffizienten. Aus der Bedingung

$$k_4 = \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_z \lambda_v \lambda_x^2} = 1 \qquad (38)$$

ergab sich dann der Maßstabsfaktor der Zeit λ_z zu

$$\lambda_z = \frac{\gamma m_3 \lambda_F}{\lambda_v \lambda_x^2} = 7{,}96 \cdot 10^{-5} \, [s^{-1}]. \qquad (39)$$

Mit diesen Maßstabsfaktoren und mit Hilfe des Schaltplanes können wir jetzt die Potentiometerliste und die Liste der Verstärker zur statischen Kontrolle des Rechners aufstellen.

Als konstante Maschinengrößen erhalten wir

$$X_o = \frac{x_o}{\lambda_x} = 0{,}2$$

$$Y_o = \frac{y_o}{\lambda_x} = 0$$

$$A = \frac{a}{\lambda_x} = 0{,}00468$$

$$B = \frac{b}{\lambda_x} = 0{,}37972$$

POTENTIOMETERLISTE

Pot.-Nr.	Koeffizient	Formel		Wert
1	k_1	$2w/\lambda_z$		0,0669
2	k_5	$\lambda_v/(\lambda_z\lambda_x)$	$=\dot{X}/V$	0,126
3	k_6	$2(x_o+a)/\lambda_x$	$=2(X_o+A)$	0,409
4	k_2	$w^2\lambda_x/(\lambda_z\lambda_v)$		0,00892
5	k_1	$2w/\lambda_z$		0,0669
6	k_7	$2(a+b)/\lambda_x$	$=2(A+B)$	0,768
7	k_2	$w^2\lambda_x/(\lambda_z\lambda_v)$		0,00892
8				
9	k_v	$2\dot{x}_o/\lambda_v$	$=2V_o$	gesucht!
10				
11	k_1	$2w/\lambda_z$		0,0669
12	k_1	$2w/\lambda_z$		0,0669
13	k_5	$\lambda_v/(\lambda_z\lambda_x)$	$=\dot{Y}/W$	0,126
14	k_w	$2\dot{y}_o/\lambda_v$	$=2W_o$	gesucht!
15	k_2	$w^2\lambda_x/(\lambda_z\lambda_v)$		0,00892
16	k_3	$\gamma m_2\lambda_F/(\lambda_z\lambda_v\lambda_x^2)$		0,0123
17	k_3	$\gamma m_2\lambda_F/(\lambda_z\lambda_v\lambda_x^2)$		0,0123
18	k_2	$w^2\lambda_x/(\lambda_z\lambda_v)$		0,00892
19	k_3	$\gamma m_2\lambda_F/(\lambda_z\lambda_v\lambda_x^2)$		0,0123
20				
-	k_4	$\gamma m_3\lambda_F/(\lambda_z\lambda_v\lambda_x^2)$		1,0

6. VERSTÄRKERLISTE

Sie wird zur statischen Prüfung der Rechenschaltung benötigt. Hierzu werden die Ausgangsspannungen an den einzelnen Verstärkern in der Betriebsart Pause gemessen. Der Integrierer Nr. 11 hat entsprechend dem Schaltplan in der Ausgangsstellung keine Spannung am Ausgang. Folglich haben einige der nachfolgenden Elemente ebenfalls keine Ausgangsspannung. Um trotzdem eine Prüfung mit von Null verschiedenen Spannungen zu ermöglichen - nur so kann das einwandfreie Arbeiten der Rechenelemente geprüft werden - wird dem Intergrierer Nr. 11 während der Kontrolle ein Anfangswert $Y_o = -0,5$ aufgeschaltet.

Verst. Nr.	Errechneter Sollwert
1	+ 0,200
2	- 0,409
3	+ 0,409
4	- 0,581
5	- 0,016
6	- 0,36
7	+ 0,36
8	+ 0,016
9	+ 0,020
10	- 0,300
11	- 0,500
12	+ 0,500
13	- 0,618
14	- 0,018
15	- 0,016
M1	+ 0,006
M2	+ 0,008
M3	+ 0,750
M4	+ 0,0063
U11	+ 0,016
U12	+ 0,0175

7. DURCHFÜHRUNG DER RECHNUNGEN

Als erstes werden die Funktionen F_1 und F_2 (s. (26)) eingestellt. Allgemein wird zur Einstellung das Argument von Null aus zuerst in einer (z. B. positiven) und dann in der anderen (z. B. negativen) Richtung in Schritten von 0,1 E (E=Maschineneinheit)bis $\pm$ 1 E in den Eingang des Funktionengebers gegeben, d. h. der Bereich des Argumentes wird durch 21 Stützstellen unterteilt. Nach jedem Schritt wird mit dem entsprechenden Einstellknopf (der insgesamt 21 Knöpfen pro Funktionsgeber) der Funktionswert eingestellt. Da wir aber für F_1 und F_2 nur positive Argumente haben, ginge die Hälfte des Einstellbereiches $-1 \leqq$ Argument $\leqq +1$ verloren, wenn nicht durch eine besondere Schaltung (s. Schaltplan) eine Substitution durchgeführt würde.

Laut Tabelle, die wir zur Einstellung benützen, läuft das Argument

$$R^2 = (X+A)^2+Y^2$$

der Funktion $F_1 = (R^2)^{-\frac{3}{2}}$ (vergl. 29)

im Bereich $0 \leq R^2 \leq 0,5.$

Durch die Substitution

$$\bar{R}^2 = 4\,R^2 - 1$$

erhalten wir $-1 \leq \bar{R}^2 \leq +1,$

wovon wir aber wegen

$$F_1 \to \infty \text{ für } R^2 \to 0$$

nur den Bereich $-0,96 \leq \bar{R}^2 \leq +1$

ausnutzen können.

Den Werten von $\bar{R}^2$ ordnen wir jetzt die zu den entsprechenden Argumenten R^2 gehörenden, normierten Funktionswerte $\overline{F}_1$ zu.

Nach Einstellen der Funktionsgeber wird die Schaltung auf dem Programmierfeld gesteckt und anschließend werden die Potentiometer eingestellt. (Einstelltabelle umseitig).

Schließlich wird die Schaltung statisch geprüft. Für den Anfangszustand der "Maschinenrechnung" werden die Ausgangsspannungen der einzelnen Verstärker rechnerisch ermittelt (Sollwert) und mit den gemessenen Istwerten verglichen. Stimmen die Beträge bis auf geringe Abweichungen und die Vorzeichen der Werte überein, so wurde die Schaltung richtig ausgeführt.

Nach dem Festlegen der Maßstäbe am Zweikoordinatenschreiber werden die Randbedingungen, d. h. Anfangs- und Endpunkt der Bahn, in ein kartesisches Koordinatensystem auf einem vorbereiteten Papierblatt eingetragen. Das Blatt wird auf der Schreibplatte des Schreibers ausgerichtet und fixiert. Anschließend wird die Spitze der Feder in den Anfangspunkt gebracht. Die Potentiometereinstellungen für die Anfangsgeschwindigkeiten sind vorerst geschätzt.

Nun wird die Rechnung begonnen und die Flugbahn auf dem Papier verfolgt. Gleichzeitig wird die Rechenzeit gemessen und mit der Rechenzeit verglichen, die der vorgegebenen Flugzeit entspricht. Die Einstellungen der Potentiometer Nr. 9 und Nr. 14 müssen für jeden Versuch verändert werden, bis sich die Spitze der Feder nach Ablauf der durch die Flugdauer festgelegten Rechenzeit im vorgeschriebenen Punkt befindet. Mit Hilfe der Formeln für die Potentiometer Nr. 9 und Nr. 14 lassen sich aus den gefundenen Koeffizientenwerten die gesuchten Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit des Satelliten errechnen. Damit ist das Problem gelöst. Mit Hilfe der Formeln für die Potentiometer Nr. 9 und Nr. 14 lassen sich aus den gefundenen Koeffizientenwerten die gesuchten Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit des Satelliten errechnen.

Tabelle zur Einstellung der Funktionsgeber

Arg. R^2	Subst. $\bar{R}^2$	$F = \frac{1}{(R^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\bar{F} = F/\lambda_F$
(0)	(-1,0)	(∞)	(∞)
0,010	-0,96	1000	0,5
0,025	-0,9	252	0,125
0,050	-0,8	89,4	0,0447
0,075	-0,7	48,3	0,0243
0,100	-0,6	31,6	0,0158
0,125	-0,5	22,6	0,0113
0,150	-0,4	17,2	0,0085
0,175	-0,3	13,6	0,0068
0,200	-0,2	11,2	0,00551
0,225	-0,1	9,35	0,00467
0,250	0	8,00	0,0040
0,275	0,1	6,94	0,00347
0,300	0,2	6,08	0,00304
0,325	0,3	5,40	0,00270
0,350	0,4	4,83	0,00241
0,375	0,5	4,36	0,00218
0,400	0,6	3,95	0,00197
0,425	0,7	3,62	0,00181
0,450	0,8	3,31	0,00165
0,475	0,9	3,06	0,00153
0,500	1,0	2,82	0,00141